Università degli Studi di Palermo

Corso di Laurea in Matematica

A.A. 2026-2027

Esercitazione 4 di Geometria 1 - Algebra Lineare

Esercizio 1. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$. Indichiamo con A^* la matrice trasposta coniugata di A, ovvero $A^* = (\overline{a_{ji}})$. La matrice A è detta *unitaria* se $A^*A = I_n$. Dimostrare che se per una matrice valgono due tra le proprietà *reale, ortogonale, unitaria*, allora vale anche la terza.

Esercizio 2. Sia $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A è detta *involutoria* se $A^2 = I_n$. Dimostrare che se per una matrice valgono due tra le proprietà *simmetrica, ortogonale, involutoria*, allora vale anche la terza.

Esercizio 3. Una matrice $P \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *idempotente* se $P^2 = P$. Stabilire se $U = \left\{P \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid P^2 = P\right\}$ è uno spazio vettoriale. In caso affermativo, trovare una base e la dimensione.

Esercizio 4. Sia $P \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice idempotente. Dimostrare che $A = 2P - I_n$ è involutoria.

Esercizio 5. Sia $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice involutoria. Dimostrare che $P = \frac{1}{2}(A + I_n)$ è idempotente.

Esercizio 6. Sia $\mathsf{H}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$ l'insieme delle matrici *hermitiane* di ordine 2. Dimostrare che $\mathsf{H}_2(\mathbb{C}) \leq \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ sul campo $\mathbb{R}$, ma non su $\mathbb{C}$. Infine, determinare una base e la sua dimensione.

Esercizio 7. Sia $r \in [0, 1]$. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} r & \sqrt{1-r^2} \\ \sqrt{1-r^2} & -r \end{pmatrix} \in \mathsf{O}_2(\mathbb{R}).$$

Esercizio 8. Ridurre le seguenti matrici a scala e discuterne il rango al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ k & k+2 & 1 \\ 2k & 1-k & k^2+k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & k-1 \\ k & k^2-1 \\ -k & 1-k \\ 2k & k^2+k-2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k+2 & 1 \\ 2 & 1-k & k-4 \\ 3 & k+4 & 2k-1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-k & k-3 & -2 \\ 1 & k+1 & 2k+3 & k-3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Calcolare il determinante delle seguenti matrici riducendole in forma triangolare mediante le mosse di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & k \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

determinare $\det(A_k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha $\det(A_k) = 0$. Cosa cambia per $k \in \mathbb{C}$?

Esercizio 11. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ due matrici quadrate di ordine n. Dimostrare che, per ogni $m \geq 1$, vale la seguente identità:

$$(A+B)^m = A^m + \sum_{k=0}^{m-1} A^k B (A+B)^{m-1-k}.$$

Cosa succede se $AB = BA$?