

Precorso di Matematica

Lezione 1: Logica, Insiemi e Funzioni

Gianmarco La Rosa

Data

Outline

1 Logica

2 Insiemi

- Operazioni e relazioni tra insiemi
- Insiemi Numerici

3 Funzioni

Logica

Da più di un secolo il linguaggio con cui è più comunemente formalizzata (e presentata) la matematica è quello degli *insiemi*.

Il linguaggio degli insiemi è strettamente legato al linguaggio della *logica*.

Una *proprietà* è un'affermazione (sensata) contenente una o più variabili libere, che risulta vera o falsa ogni volta che si assegna alla variabile un valore.

Esempio

$P(n)$ = " n è un numero pari."

$Q(x, y)$ = " x è fratello/sorella di y ."

Logica

Se quantifichiamo le variabili (per ogni , esiste), esse cessano di essere libere. Otteniamo così le *proposizioni*.

Esempio

"Esiste n tale che n è un numero pari."

"Per ogni x esiste y tale che x è fratello/sorella di y ."

Locuzione	Nome	Simbolo
per ogni	QUANTIFICATORE UNIVERSALE	$\forall$
esiste	QUANTIFICATORE ESISTENZIALE	$\exists$

Logica

Se quantifichiamo le variabili (per ogni , esiste), esse cessano di essere libere. Otteniamo così le *proposizioni*.

Esempio

"Esiste n tale che n è un numero pari." $\rightarrow \exists n P(n)$

"Per ogni x esiste y tale che x è fratello/sorella di y ." $\rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$

Locuzione	Nome	Simbolo
per ogni	QUANTIFICATORE UNIVERSALE	$\forall$
esiste	QUANTIFICATORE ESISTENZIALE	$\exists$

Logica

DOMANDA: Cosa posso fare con le proposizioni?

RISPOSTA: Connettivi logici.

Locuzione	Nome	Simbolo
e	CONGIUNZIONE	$\wedge$
o	DISGIUNZIONE	$\vee$
non	NEGAZIONE	$\neg$
se ..., allora (o "implica")	IMPLICAZIONE	$\Rightarrow$

Logica

$P_1(n) = "n \text{ è un numero pari}."$

$P_2(n) = "n \text{ è maggiore di } 1."$

- $P_1(n) \wedge P_2(n) = "n \text{ è pari e maggiore di } 1."$
- $P_1(n) \vee P_2(n) = "n \text{ è pari o maggiore di } 1."$
- $\neg P_1(n) = "n \text{ non è pari}."$
- $P_1(n) \Rightarrow P_2(n) = "Se \text{ } n \text{ è pari, allora è maggiore di } 1."$

Logica

TAVOLE DI VERITÀ

Congiunzione		
P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disgiunzione		
P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Negazione	
P	$\neg P$
V	F
F	V

Implicazione		
P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Logica

Come negare una implicazione (*Contronominale*)

Le proposizioni (proprietà + quantificatori + eventuali connettivi logici) possono essere negate per intero. Facciamo qualche esempio:

- $\neg(\exists n P(n)) = \forall n(\neg P(n))$

ESISTE negato diventa PER OGNI + negazione proprietà

- $\neg(\forall n P(n)) = \exists n(\neg P(n))$

PER OGNI negato diventa ESISTE + negazione proprietà

- Contronominale: $\neg(P \Rightarrow Q) = \neg Q \Rightarrow \neg P$

Esempio: Se una funzione è derivabile in un punto, allora è continua in quel punto.

Contronominale: Se una funzione NON è continua in un punto, allora non è derivabile.

Teoremi, Lemmi e Corollari

- **Definizione:** una spiegazione del significato matematico di una parola.
- **Teorema:** un'affermazione che è stata dimostrata essere vera.
- **Proposizione:** un'affermazione meno importante ma comunque interessante e vera.
- **Lemma:** un'affermazione vera utilizzata nella dimostrazione di altre affermazioni vere (cioè, un teorema meno importante ma utile nella dimostrazione di altri risultati).
- **Corollario:** un'affermazione vera che è una semplice deduzione da un teorema o da una proposizione (la cui dimostrazione è spesso omessa).
- **Dimostrazione:** la spiegazione del perché un'affermazione è vera.
- **Congettura:** un'affermazione che si crede vera, ma per la quale non abbiamo una dimostrazione (un'affermazione che viene proposta come vera).
- **Assioma:** un'assunzione fondamentale riguardo una situazione matematica (un'affermazione che assumiamo come vera).

Insiemi

Il concetto di *insieme* è un concetto primitivo. Cioè, non lo si definisce (a meno di ricadere in loop logici). Ci si affida di solito al senso comune.

Un *insieme* A è una collezione/famiglia/aggregato/ect. di *elementi* a . Inoltre, esso risulta univocamente determinato dagli elementi che *appartengono* all'insieme.

Se a appartiene all'insieme A scriveremo $a \in A$.

Esempio

Sia $A = \{a, e, i, o, u\}$. Allora $a \in A$.

Nell'esempio precedente, l'insieme A viene rappresentato elencando i suoi elementi. Tale rappresentazione viene detta *per elencazione*.

Insiemi

Rappresentazione per *proprietà caratteristica*: ci permette di dire univocamente quale proprietà devono soddisfare gli elementi per appartenere all'insieme. In generale

$$A = \{a \mid a \text{ "soddisfa la proprietà } P"\}$$

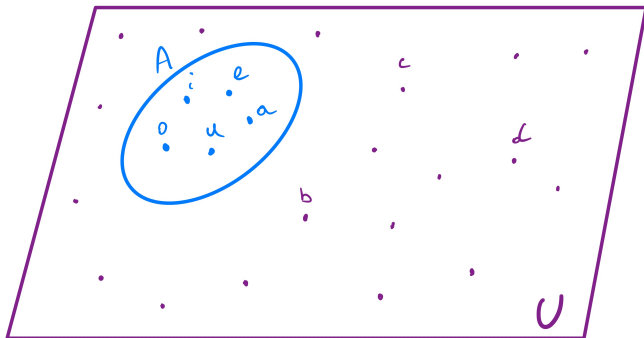
Il simbolo $\mid$ si legge "tale che". Alle volte si usa $:$ al posto di $\mid$.

Esempio

Sia $A = \{x \mid x \text{ sia una vocale dell'alfabeto}\}$. Allora $a \in A$.

Insiemi

Un ulteriore modo di rappresentare gli insiemi sono i *diagrammi di Eulero-Venn*.



Relazioni e operazioni tra insiemi

OPERAZIONI

- L'*intersezione* tra due insiemi A e B è l'insieme costituito dagli elementi che stanno contemporaneamente in A e in B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- L'*unione* tra due insiemi A e B è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A o a B (o ad entrambi, e in questo caso vanno considerati una sola volta).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Relazioni e operazioni tra insiemi

OPERAZIONI

- L'*insieme differenza* tra A e B (o *complementare di B in A*) è l'insieme costituito dagli elementi di A che non appartengono a B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- Il *complementare di A* (nell'insieme universo U) è l'insieme degli elementi che non stanno in A .

$$A^c = \overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- Il *prodotto cartesiano di due insiemi A e B* è l'insieme delle coppie ordinate, in cui il primo elemento sta in A . e il secondo sta in B .

$$A \times B = \overline{A} = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Relazioni e operazioni tra insiemi

RELAZIONI

- Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$ (*insieme vuoto*).
- Un insieme A è *sottoinsieme* di B , indicato con $A \subseteq B$, se ogni elemento di A è contenuto in B .
- Un insieme A è *sottoinsieme proprio* di B , indicato con $A \subset B$, se ogni elemento di A è contenuto in B ma non viceversa.
- Due insiemi A e B *coincidono* se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. In questo caso scriveremo $A = B$.

Relazioni e operazioni tra insiemi

Esempio

$U = \{x \mid x \text{ è una lettera dell'alfabeto}\}$

$A = \{x \mid x \text{ è una vocale}\} = \{a, e, i, o, u\}$

$A^c = \{x \mid x \text{ NON è una vocale}\} = \{x \mid x \text{ è una consonante}\}$

$B_1 = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola "aiuola"}\} = \{a, i, u, o, l\}$

$A \cap B_1 = \{a, i, u, o\}$

$A \subseteq B_1$? No, visto che $e \in A$ ma non $a B_1$.

E se considero

$B_2 = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola "aiuole"}\} = \{a, i, u, o, l, e\}$

Esempio

Esempio

$D = \{n \mid n \text{ è dispari}\}, Q = \{n \mid n \text{ è un multiplo di } 2\}$

$P \cap Q = ?$

Insiemi Numerici

NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Un numero n è *divisibile* per un numero $m \leq n$, oppure n è *multiplo* di m , se esiste un numero k tale che $n = m \cdot k$.

Esempio

6 è divisibile/multiplo per 2 (infatti $6 = 3 \cdot 2$).

Esempio

- Nessun numero è divisibile per 0.
- ogni numero $n \neq 0$ ha almeno due divisori (detti *banali*): 1 e n .
- Se un numero (diverso da 1) non ha altri divisori oltre quelli banali è detto *primo*.
- I numeri primi sono infiniti. (Teorema di Euclide)

Insiemi Numerici

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

Teorema (Teorema fondamentale dell'aritmetica)

Ogni numero naturale n può essere fattorizzato come prodotto di numeri primi nella forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_r$ sono numeri primi non banali, e gli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sono numeri ≥ 1 .

Questa decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori.

Esempio

$$2 = 2^1$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

Insiemi Numerici

Sui numeri naturali sono definiti la *somma* e il *prodotto*.

Q: Posso sempre fare la *sottrazione*?

A: No (es. $3 - 5 = ?$)

NUMERI INTERI (O RELATIVI)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Il numero $-n$ si dice *opposto* di n .

Q: Posso sempre fare la *divisione*?

A: No (es. $3 \div 5 = ?$)

NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} \mid n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0 \right\}$$

Insiemi Numerici

Operazioni in $\mathbb{Q}$

$$\frac{n}{d} \pm \frac{m}{d} = \frac{n \pm m}{d}$$

$$\frac{n}{d_1} \pm \frac{m}{d_2} = \frac{n \cdot d_2 \pm m \cdot d_1}{d_1 \cdot d_2}$$

$$\frac{n}{d_1} \cdot \frac{m}{d_2} = \frac{n \cdot m}{d_1 \cdot d_2}$$

$$\frac{\frac{n}{d_1}}{\frac{m}{d_2}} = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{d_2}{m}$$

Il numero $\frac{m}{n}$ è l'*inverso* (o *reciproco*) di $\frac{n}{m}$.

Insiemi Numerici

I numeri razionali ammettono una rappresentazione decimale avente, dopo la virgola, un numero finito di cifre diverse da zero oppure una successione infinita ma periodica.

Esempio

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{33} = 0,333333\dots$$

Insiemi Numerici

Q.1: Tutti i numeri ammettono una rappresentazione decimale?

Q.2: Tutti i numeri ammettono la radice quadrata (o n -esima, in generale)?

A: No.

NUMERI REALI (O IRRAZIONALI)

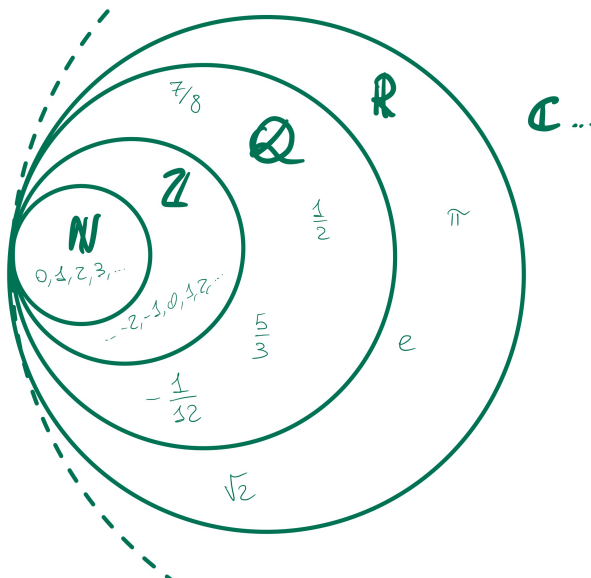
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Qualche esempio:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480...$$

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058...$$

Insiemi Numerici



Intervalli di $\mathbb{R}$

Definizione

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice intervallo se ha la seguente proprietà: se $x_1 < x_2 < x_3$ e $x_1, x_3 \in I$, allora anche $x_2 \in I$.

- Intervalli limitati
- Intervalli illimitati

Con il simbolo ∞ indichiamo un numero che è più grande di ogni quantità concepibile o inconcepibile.

Intervalli di $\mathbb{R}$

Intervalli limitati:

- Intervalli chiusi:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- Intervalli aperti:

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

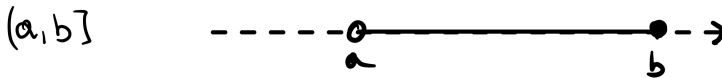
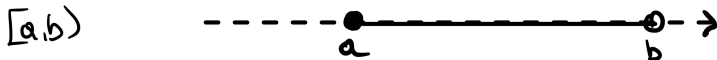
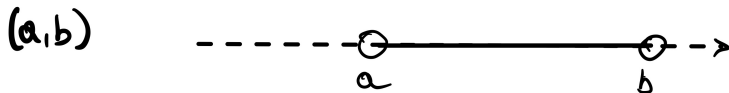
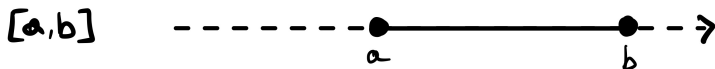
- Intervalli semiaperti:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Intervalli di $\mathbb{R}$

Intervalli limitati:



Intervalli di $\mathbb{R}$

Intervalli illimitati:

- Intervalli chiusi:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

- Intervalli aperti:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

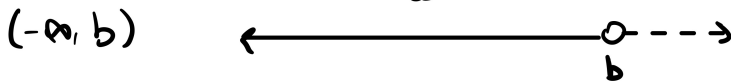
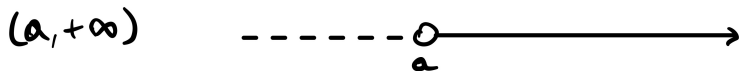
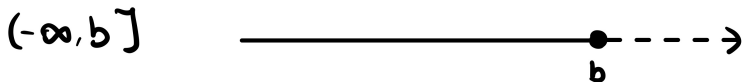
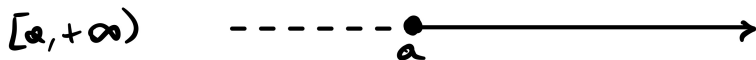
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

-

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Intervalli di $\mathbb{R}$

Intervalli limitati:



Funzioni

Il concetto di **funzione** nasce dal bisogno di descrivere matematicamente le *quantità variabili in base ad una certa legge*.

Definizione

Una funzione da A in B è una legge che associa ad ogni elemento $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ uno e un solo elemento $y \in B \subseteq \mathbb{R}$.

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Example

Consideriamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $y = f(x) = 2x + 1$.
Quindi $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Funzioni

- x e y vengono dette *variabili*
- x è la variabile *indipendente*
- y è la variabile *dipendente*
- A è detto *dominio*
- B è detto *codominio*